引文格式:郭金运,吴渴知,金鑫,等.高精度三维跟踪抛物运动的重力垂直梯度测量方法[J].武汉大学学报(信息科学版),2025,50(3):462-468.DOI:10.13203/j.whugis20220711

Citation:GUO Jinyun,WU Kezhi,JIN Xin,et al.A Method to Determine Vertical Gravity Gradient by High-Precision 3D Tracking Parabolic Motion[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University,2025,50(3):462-468.DOI:10.13203/j.whugis20220711

高精度三维跟踪抛物运动的重力垂直梯度测量方法

郭金运[1] 吴渴知[1] 金 鑫[1] 周茂盛[2] 刘 新[1]

1 山东科技大学测绘与空间信息学院,山东 青岛,266590

2 齐鲁工业大学(山东省科学院)海洋仪器仪表研究所,山东 青岛,266100

摘 要:重力垂直梯度是探究地球重力场的关键信息,在大地测量学、地球物理学和地球动力学等领域中的应用越来越广泛,因此,快速、准确地获取高精度的重力垂直梯度信息愈发迫切。提出了一种基于三维跟踪测量抛物运动的重力垂直梯度测量方法,在真空环境中,利用三维跟踪技术动态追踪抛物运动下落的靶球,获得靶球运动的三维坐标时间序列,建立轨迹观测方程,并利用最小二乘法提取出重力垂直梯度信息。对所提测量方法设计了仿真实验并进行精度验证,实验结果表明,当落体测量精度达到微米级时,此测量方法的主要误差源是三维跟踪测量误差和时间测量误差,其中时间测量误差对重力垂直梯度测量精度的影响较小。对抛物运动坐标时间序列同时加入标准差为10 μm的三维跟踪测量随机误差和标准差为10 ns时间测量随机误差后,统计重力垂直梯度的测量误差,其均方根值约为1.31 E(1 E=10^{-9}/s^2)。该方法在测量重力垂直梯度时是有效的,并且具有较好的稳定性。

关键词:重力垂直梯度;抛物运动;三维跟踪技术

中图分类号:P223 **文献标识码**:A **收稿日期**:2023-11-04

DOI:10.13203/j.whugis20220711 **文章编号**:1671-8860(2025)03-0462-07

A Method to Determine Vertical Gravity Gradient by High-Precision 3D Tracking Parabolic Motion

GUO Jinyun[1] *WU Kezhi*[1] *JIN Xin*[1] *ZHOU Maosheng*[2] *LIU Xin*[1]

1 College of Geodesy and Geomatics, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China

2 Institute of Oceanographic Instrument, Qilu University of Technology (Shandong Academy of Sciences), Qingdao 266100, China

Abstract: **Objectives**: The vertical gravity gradient plays an important role in the exploration of the earth gravity field. It is more and more widely used in the fields of geodesy, geophysics and geodynamics. Therefore, it is urgent to obtain the vertical gravity gradient with high accuracy quickly and accurately. **Methods**: A new method to determine vertical gravity gradients by 3D tracking parabolic motion is proposed. In a vacuum environment, the 3D tracking technology is used to dynamically track the parabolic falling target to obtain the 3D coordinate time series of the target movement, establish the trajectory observation equation, and extract the gravity vertical gradient using the least square method. **Results**: When the measurement accuracy of falling target reaches micron level, the main error sources of this measurement method are 3D tracking measurement error and time measurement error, of which the time measurement error has a small impact on the measurement accuracy of vertical gravity gradient. After adding the 3D tracking measurement random error with the standard deviation (STD) is 10 μm and the time measurement random error with the STD is 10 ns to the parabolic motion coordinate time series, the root mean square of the measurement error

基金项目:国家自然科学基金(42430101,42274006)。

第一作者:郭金运,博士,教授,主要从事空间大地测量、物理大地测量、海洋大地测量等方面的研究。 jinyunguo1@126.com

通信作者:金鑫,博士。jx10101010@126.com

of vertical gravity gradient is about 1.31 E (1 E=$10^{-9}/s^2$). **Conclusions**: The proposed method of vertical gravity gradient measurement is effective and has good stability.

Key words: vertical gravity gradient; parabolic motion; 3D tracking technology

重力垂直梯度是指重力沿其铅垂方向的导数,它表示的是地球重力场强度在垂直方向上的变化率,比重力具有更高的空间分辨率,是重力测量学和地球物理学中的重要地球物理量[1]。重力垂直梯度对近地表的密度变化以及地球内部的质量运动有较为敏锐的探测能力[2],与重力相比,重力垂直梯度在探测埋藏较浅的密度异常体时反应更为敏锐,表现的特征更丰富全面[3]。因此研究重力垂直梯度及其时变特征,可以获取地球表层及其内部物质的空间分布、运动和变化[4]。在地球物理探测领域,为满足油气勘探的需要,重力垂直梯度测量开始得到重视和应用[5],随着重力垂直梯度测量精度的提高,重力垂直梯度测量技术已成为资源探测和地质勘探的关键技术之一[6-7]。在物理大地测量学中,利用重力垂直梯度可以进行精化似大地水准面的研究[8-9]。在地球动力学中,重力垂直梯度数据已应用于断层活动、冰后回弹和震源研究[10],使人们对这些动力学事件以及灾害预测有了进一步认识[11]。综上所述,重力垂直梯度测量数据可以为大地测量学、地球物理学和地球动力学等研究领域提供丰富的信息,对地球科学和空间科学的发展有着重要的意义[5]。

地面上的传统重力垂直梯度测量方法主要有3种:利用高精度相对重力仪测定重力垂直梯度,利用绝对重力仪的重力观测数据确定重力垂直梯度以及利用重力梯度仪直接测得重力垂直梯度。

利用相对重力仪测量重力垂直梯度时,通常将两台高精度相对重力测量仪器置于位置高低不同处同时观测,然后交换两台仪器反复观测,获取两点间的重力差值以求得重力垂直梯度值。这种测量方法成本较高,操作复杂,测量效率较低,测量仪器不易便携,测量环境复杂时仪器稳定性较差,因此不利于广泛应用于重力垂直梯度测量领域。

与相对重力仪获取重力垂直梯度不同,绝对重力仪首先采集自由落体运动或上抛运动下落的距离-时间序列[12],然后在时间序列中获取重力垂直梯度信息[13-14]。绝对重力仪观测时存在的误差源较为复杂[15-17],观测数据中存在的有色噪声难以消除,测量方法适用性不强[12]。

除此之外,重力梯度仪也是测量重力垂直梯度的重要工具之一,经过一个多世纪的发展,重力梯度仪经历了扭力测量、旋转加速度计测量、超导测量、量子技术测量等。其中扭秤式重力梯度仪操作繁琐,需要测得不同方向上的独立偏转角后才能确定重力梯度分量,测量周期较长;旋转加速度计式重力梯度仪是通过测量两点间的加速度差获取重力梯度分量信息,作为目前实际生产应用较为广泛的重力梯度仪,其测量精度优于10 E(1 E=$10^{-9}/s^2$)[18-19],但其对加速度计的测量精度要求较高,而加速度计复杂的降噪过程限制了其发展;超导重力梯度仪作为一种相对测量仪器,通过磁力弹簧振子和位移检测两部分实现重力信号的测量[20],设备结构复杂,体积大,不易搬运;量子重力梯度仪利用原子云落下时引力场拉力的细微变化探测微重力的变化,造价较高且易受磁场和热场的干扰[21]。因此,克服现有重力垂直梯度测量方法的缺点,高效获取高精度的重力垂直梯度信息仍然是当前面临的挑战[22]。

三维跟踪测量系统结合了激光干涉测距技术、光电探测技术、计算机及控制技术、现代数值计算理论等,能对空间运动目标进行跟踪并实时测量目标的空间三维坐标[23]。它采用极坐标测量原理,具有高精度、高效率、实时跟踪等特点,测量时可达亚微米级精度,数据输出速率高达2 000 Hz[24],测量时不易受周围环境的影响且操作简单。三维跟踪测量技术目前已较广泛应用于精密工程测量、机器人研发等领域[25-27]。

基于此,为方便测量不同地区的重力垂直梯度信息,简化重力垂直梯度测量的复杂性,本文提出了一种三维跟踪抛物运动的重力垂直梯度测量方法。

1　重力垂直梯度的测量原理与方法

本文中重力垂直梯度的测量原理示意图如图1所示,在真空环境中,利用三维跟踪技术与时间采集器来同步追踪抛物运动的靶球,获取靶球运动的三维坐标时间序列。

基于上述测量系统,在真空环境中,获取抛物运动靶球的三维坐标时间序列后,采用3倍中误差法对测量序列进行粗差剔除,利用附有限制条件的间接平差法从三维坐标时间序列中提取重力垂直梯度信息。

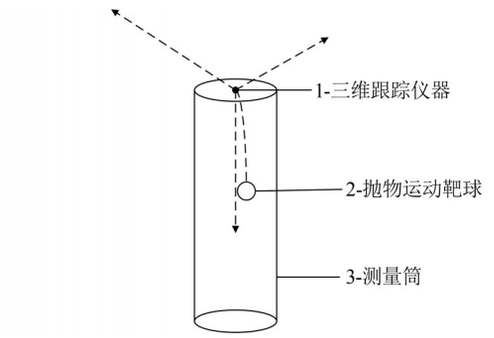


图1 重力垂直梯度测量原理示意图

Fig. 1 Sketch Map of Vertical Gravity Gradient Measurement

设起始时刻t_0处抛物运动的靶球坐标为(X_0, Y_0, Z_0),第i时刻t_i处抛物运动靶球的坐标为$(x_i, y_i, z_i)(i=1,2,\cdots,n)$;在$X$轴、$Y$轴、$Z$轴3个方向上,抛物运动靶球的初速度分别为$v_x$、$v_y$、$v_z$;测点处重力加速度值大小为$g$,重力垂直梯度值大小为$K$;重力加速度$g$与$X$轴、$Y$轴、$Z$轴的夹角分别为$\alpha$、$\beta$、$\gamma$,在真空环境中,落体仅受重力作用,可认为重力加速度的方向不发生改变,α、β、γ为固定量;t_0~t_i时刻抛物运动靶球下落的距离为s,则根据抛物运动的原理,t_i时刻的观测方程为:

$$\begin{cases} x_i = x_0 + v_x(t_i - t_0) + 0.5(g + 0.5sK)(t_i - t_0)^2\cos\alpha \\ y_i = y_0 + v_y(t_i - t_0) + 0.5(g + 0.5sK)(t_i - t_0)^2\cos\beta \\ z_i = z_0 + v_z(t_i - t_0) + 0.5(g + 0.5sK)(t_i - t_0)^2\cos\gamma \end{cases} \tag{1}$$

约束方程为:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{2}$$

式(1)中的x_i、y_i、z_i和t_i均为观测值,其余值均作为未知参数求解,误差方程可以用矩阵表达为:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{l} \tag{3}$$

限制条件方程用矩阵表达为:

$$\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{W}_x = 0 \tag{4}$$

式中,$\boldsymbol{V}$表示改正数;$\boldsymbol{A}$表示误差方程的系数;$\hat{\boldsymbol{x}}$表示未知参数;$\boldsymbol{l}$表示误差方程的自由项;$\boldsymbol{C}$表示限制条件方程的系数;$\boldsymbol{W}_x$表示限制条件方程的自由项。对式(3)及式(4)中各项参数单独求导:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t_i - t_0 & 0 & 0 \\ 0 & t_i - t_0 & 0 \\ 0 & 0 & t_i - t_0 \\ -\left[v_x + \left(g + \frac{1}{2}sK\right)(t_i - t_0)\cos\alpha\right] & -\left[v_y + \left(g + \frac{1}{2}sK\right)(t_i - t_0)\cos\beta\right] & -\left[v_z + \left(g + \frac{1}{2}sK\right)(t_i - t_0)\cos\gamma\right] \\ -\frac{1}{2}\left[(t_i - t_0)^2\sin\alpha\left(g + \frac{1}{2}sK\right)\right] & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\left[(t_i - t_0)^2\sin\beta\left(g + \frac{1}{2}sK\right)\right] & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\left[(t_i - t_0)^2\sin\gamma\left(g + \frac{1}{2}sK\right)\right] \\ \frac{1}{2}(t_i - t_0)^2\cos\alpha & \frac{1}{2}(t_i - t_0)^2\cos\beta & \frac{1}{2}(t_i - t_0)^2\cos\gamma \\ \frac{1}{4}(t_i - t_0)^2\cos\alpha & \frac{1}{4}(t_i - t_0)^2\cos\beta & \frac{1}{4}(t_i - t_0)^2\cos\gamma \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}x_0 & \mathrm{d}y_0 & \mathrm{d}z_0 & \mathrm{d}v_x & \mathrm{d}v_y & \mathrm{d}v_z & \mathrm{d}t_0 & \mathrm{d}\alpha & \mathrm{d}\beta & \mathrm{d}\gamma & \mathrm{d}g & \mathrm{d}K \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} x_i - \left[x_0^0 + v_x^0(t_i - t_0^0) + \frac{1}{2}\left(g^0 + \frac{1}{2}sK^0\right)(t_i - t_0^0)^2\cos\alpha^0\right] \\ y_i - \left[y_0^0 + v_y^0(t_i - t_0^0) + \frac{1}{2}\left(g^0 + \frac{1}{2}sK^0\right)(t_i - t_0^0)^2\cos\beta^0\right] \\ z_i - \left[z_0^0 + v_z^0(t_i - t_0^0) + \frac{1}{2}\left(g^0 + \frac{1}{2}sK^0\right)(t_i - t_0^0)^2\cos\gamma^0\right] \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\sin\alpha\cos\alpha & -2\sin\beta\cos\beta & -2\sin\gamma\cos\gamma & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{W}_x = 1 - \cos^2\alpha^0 - \cos^2\beta^0 - \cos^2\gamma^0$$

则法方程可以表示为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{N}_{bb}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_s - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l} = 0 \\ \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{W}_x = 0 \end{cases} \tag{5}$$

式中,$\boldsymbol{N}_{bb} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$;$\boldsymbol{K}_s$、$\boldsymbol{P}$分别表示对应于限制条

件方程的联系数向量和权阵，$\boldsymbol{K}_s=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{N}_{bb}^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{N}_{bb}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l}-\boldsymbol{W}_x)$，此处 $\boldsymbol{P}$ 设为单位阵。

对式(5)加入阻尼因子 μ：

$$\begin{cases}(\boldsymbol{N}_{bb}+\mu\boldsymbol{I})\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_s-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l}-\mu\hat{\boldsymbol{x}}=0\\ \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{W}_x=0\end{cases}\tag{6}$$

式中，μ 为常数；$\boldsymbol{I}$ 表示单位阵。加入阻尼因子后，可以避免方程在解算过程中出现病态性的问题，并能提高迭代算法中数值的稳定性，在保证成功率的前提下加速收敛过程。若不加入阻尼因子，可能会出现病态方程，导致方程无解或使得迭代过程发散。

$$\hat{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\hat{x}_0 & \hat{y}_0 & \hat{z}_0 & \hat{v}_x & \hat{v}_y & \hat{v}_z & \hat{t}_0 & \hat{\alpha} & \hat{\beta} & \hat{\gamma} & \hat{g} & \hat{K}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\tag{8}$$

解出 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 后，代入式(3)可求得 $\boldsymbol{V}$，最后即可求出：

$$\hat{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{V}\tag{9}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{X}^0+\hat{\boldsymbol{x}}\tag{10}$$

综上所述，获取重力垂直梯度信息的具体过程如下：

1) 利用激光跟踪仪获取抛物运动的三维坐标时间序列；

2) 对获取的三维坐标时间序列进行粗差剔除；

3) 输入粗差剔除后的三维坐标时间序列 t_i、x_i、y_i、z_i；

4) 设定式(1)中各参数的初值；

5) 建立误差方程和限制条件方程表达式，根据各参数初值及抛物运动的三维坐标时间序列确定式(3)和式(4)中的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{W}_x$；

6) 建立法方程，确定式(5)中的法方程系数 $\boldsymbol{N}_{bb}$、联系数向量 $\boldsymbol{K}_s$、权阵 $\boldsymbol{P}$ 以及式(6)中的阻尼系数 μ；

7) 迭代求解，由式(7)得到迭代方程后设置迭代过程的收敛条件：$\left|\hat{K}^k-\hat{K}^{k-1}\right|<\varepsilon$，当重力垂直梯度值第 k 次的迭代结果满足收敛条件时，输出解算结果，得到重力垂直梯度信息，不满足条件时重复步骤 4)～7)。

2　仿真实验

2.1　理论精度分析

本文提出的重力垂直梯度测量方法中，主要误差源是三维跟踪测量误差和时间测量误差。三维跟踪技术和时间采集器动态追踪抛物运动的靶球时，三维跟踪测量误差和时间测量误差会在三维坐标时间序列中引入随机误差，影响重力垂直梯度的测量精度。

考虑到方程中含有较多的未知参数并且未知参数的值不能直接获取，需先对未知参数设置初值，而在初值设置时可能存在误差，因此采用迭代的方法求解未知参数。将式(6)整理为迭代方程：

$$\boldsymbol{x}^{k+1}=(\boldsymbol{N}_{bb}+\mu\boldsymbol{I})^{-1}\Big(-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{cc}^{-1}(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{N}_{bb}+\mu\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{W}+\mu\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}^k)-\boldsymbol{W}_x)+\boldsymbol{W}+\mu\boldsymbol{x}^k\Big)\tag{7}$$

式中，$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l}$；$\boldsymbol{N}_{cc}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{N}_{bb}+\mu\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{x}^k$ 为第 k 次的求解结果。

对式(7)进行迭代求解：

为了验证本文中重力垂直梯度测量方法的有效性，在保证落体测量精度为微米级的前提下，根据实验原理进行仿真实验。在三维坐标时间序列中分别加入三维跟踪测量随机误差和时间测量随机误差，设三维跟踪测量的实时操作系统跟踪测量频率为 2 000 Hz，下落距离为 1 m。

首先设定式(1)中各未知参数的初值，其中 $x_0=1$ m，$y_0=1$ m，$z_0=1$ m，$v_x=0.012$ m/s，$v_y=0.01$ m/s，$v_z=0.01$ m/s，$t_0=0$，$\alpha=89.4°$，$\beta=89.2°$，$\gamma=1°$，$g=9.798\,76$ m/s^2，$K=3\,086$ E，根据式(1)和式(2)仿真出不含测量随机误差的抛物运动三维坐标时间序列；然后在不含有任何测量随机误差的三维坐标时间序列中引入三维跟踪测量随机误差和时间测量随机误差，生成含有测量随机误差的三维坐标时间序列；最后对序列进行迭代求解后得到重力垂直梯度信息，其中迭代过程的收敛条件中 $\varepsilon=1\times10^{-4}$ E。

根据上述仿真实验流程，考虑到三维跟踪测量系统的测量精度[28]，当落体测量精度达到微米级时，对抛物运动坐标时间序列同时加入均值为 0 μm、标准差为 10 μm 的三维跟踪测量随机误差和均值为 0 ns、标准差为 10 ns 的时间测量随机误差，30 次测量结果取其平均值作为一次观测值，并重复实验 1 000 次，统计重力垂直梯度的解算结果与实验时重力垂直梯度初值 3 086 E 之间的差值，统计结果如表 1 所示，抛物运动测量重力垂直梯度的理论精度如图 2 所示。

如表 1 和图 2 所示，落体测量精度达到微米级时，基于三维跟踪抛物运动的重力垂直梯度测量方法稳定性较好，同时加入激光跟踪测量误差和时间测量误差后，重力垂直梯度的测量误差整体在 −8.97～10.77 E 之间，平均值为 0.06 E，均方

根值为1.31 E,整体在较小范围内波动。

表1 抛物运动测量重力垂直梯度误差统计/E

Table 1 Error Statistics of Vertical Gravity Gradient Measured by Parabolic Motion/E

测量随机误差	最大值	最小值	平均值	标准差	均方根值
10 μm+10 ns	10.77	−8.97	0.06	1.31	1.31

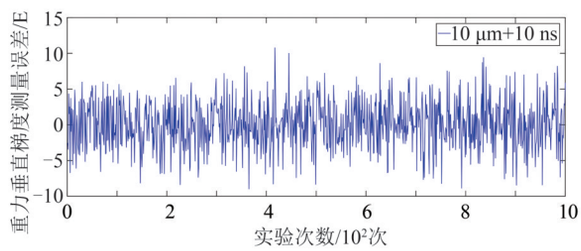


图2 抛物运动测量重力垂直梯度的理论精度

Fig. 2 Theoretical Accuracy of Measuring Vertical Gravity Gradient by Parabolic Motion

2.2 三维跟踪测量误差分析

为了分析三维跟踪测量误差对重力垂直梯度测量的影响,假设时间测量误差为0且落体测量精度达到微米级,对无误差的三维坐标时间序列分别加入均值为0 μm、标准差分别为1 μm、5 μm、10 μm的三维跟踪测量随机误差,将这些测量随机误差平均分配于三维坐标序列的x、y、z 3个方向上,30次测量结果取其平均值作为一次观测值,并重复实验1 000次,生成含有三维跟踪测量随机误差的三维坐标时间序列后进行迭代求解,统计解算结果与实验时重力垂直梯度初值(3 086 E)之间的差值,统计结果如表2所示,三维跟踪测量误差对重力垂直梯度测量的影响如图3所示。

表2 三维跟踪测量误差对抛物运动测量重力垂直梯度的影响统计

Table 2 Statistics of the Influence of 3D Tracking Measurement Error on Vertical Gravity Gradient by Parabolic Motion

三维跟踪测量随机误差/μm	最大值/E	最小值/E	平均值/E	标准差/E	均方根值/E
1	1.12	−0.95	0.01	0.33	0.35
5	7.09	−5.02	0.05	0.65	0.65
10	10.06	−12.30	−0.02	1.30	1.31

从表2和图3中可以看出,落体测量精度为微米级时,对三维坐标时间序列中引入的三维跟踪测量误差越大,重力垂直梯度的测量精度越低,平均值均接近于0,且三维跟踪随机测量误差增大时,重力垂直梯度测量误差的标准差逐渐增大,分别为0.33 E、0.65 E、1.30 E,测量方法的稳定性随之降低。加入1 μm的激光跟踪测量误差时,重力垂直梯度的测量误差在−0.95~1.12 E之间;加入5 μm的激光跟踪测量误差时,重力垂直梯度测量误差在−5.02~7.09 E之间;加入10 μm的激光跟踪测量误差时,激光跟踪测量误差对测量重力垂直梯度的影响达到最大,测量误差在−12.30~10.06 E之间。

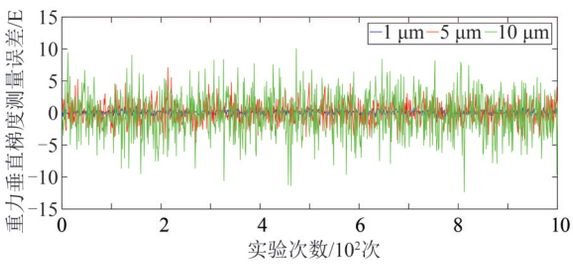


图3 三维跟踪测量误差对抛物运动测量重力垂直梯度的影响

Fig. 3 Influence of 3D Tracking Measurement Error on Vertical Gravity Gradient by Parabolic Motion

2.3 时间测量误差分析

分析时间测量误差对重力垂直梯度测量的影响时,假设其余各项误差均不影响重力垂直梯度的测量和解算,且三维跟踪测量落体精度达到微米级,分别将均值为0 ns、标准差分别为1 ns、5 ns、10 ns的时间测量随机误差加入无误差的三维坐标时间序列,30次测量结果取其平均值作为一次观测值,并重复实验1 000次,生成含有时间测量随机误差的三维坐标时间坐标序列后进行迭代求解,统计解算结果与实验时重力垂直梯度初值(3 086 E)的差值,统计结果如表3所示,时间测量随机误差对重力垂直梯度测量的影响如图4所示。

表3 时间测量误差对抛物运动测量重力垂直梯度的影响统计

Table 3 Statistics of the Influence of Time Measurement Error on Vertical Gravity Gradient by Parabolic Motion

时间测量随机误差/ns	最大值/E	最小值/E	平均值/E	标准差/E	均方根值/E
1	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
5	0.03	−0.03	0.00	0.01	0.01
10	0.06	−0.06	0.00	0.02	0.02

从表3和图4中可以看出,落体测量精度达到微米级时,加入的时间测量随机误差越大,对重力垂直梯度测量的影响越大,时间测量随机误差为10 ns时,重力垂直梯度测量误差达到最大,

为±0.06 E,标准差和均方根值均为0.02 E。总体来说,时间测量随机误差对重力垂直梯度测量的影响较小,加入时间测量随机误差后,重力垂直梯度测量误差整体控制在较小范围内,测量方法仍具有较好的稳定性。

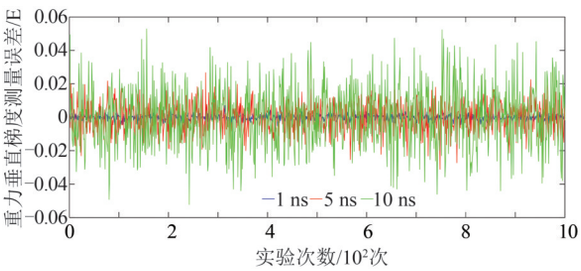


图4　时间测量误差对抛物运动测量重力垂直梯度的影响

Fig. 4　Influence of Time Measurement Error on Vertical Gravity Gradient by Parabolic Motion

3　结　语

本文提出了一种高精度三维跟踪抛物运动的重力垂直梯度测量方法,并通过仿真实验验证了该方法的有效性。这种新型测量方法使用三维激光测量技术动态追踪抛物运动,结合时间采集器获取抛物运动目标的三维坐标时间序列,并通过最小二乘迭代法解算出重力垂直梯度信息。

基于三维跟踪测量技术的重力垂直梯度测量方法主要有两个误差来源:三维跟踪测量误差和时间测量误差。采用控制变量的方法分别讨论了每个误差源对抛物运动测量重力垂直梯度的影响。实验结果表明,落体测量精度达到微米级时,三维跟踪测量误差是影响本文重力垂直梯度测量方法的主要误差,时间测量误差对重力垂直梯度测量的影响较小,且引入时间测量随机误差后,该方法仍具有较好的稳定性。

参　考　文　献

[1] 边少锋,张赤军. 地形起伏对重力垂直梯度影响的计算[J]. 物探化探计算技术,1999,21(2):133-140.
BIAN Shaofeng, ZHANG Chijun. Computation of Topographic Effects on Vertical Gravity Gradient [J]. *Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration*, 1999, 21(2): 133-140.

[2] ZAHOREC P, MIKUŠKA J, PAPČO J, et al. Towards the Measurement of Zero Vertical Gradient of Gravity on the Earth's Surface[J]. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 2015, 59(4): 524-537.

[3] BORNEMISZA S. Vertical Gradient of Gravity [J]. *Geophysics*, 2002, 23(2): 359-360.

[4] 赵珞成,罗志才,刘浩,等. 重力梯度同步观测方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2012,37(4):428-431.
ZHAO Luocheng, LUO Zhicai, LIU Hao, et al. Simultaneous Observation Method of Gravity Gradient [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2012, 37(4): 428-431.

[5] 张赤军,边少锋,周旭华,等. 重力垂直梯度的测定及其应用与潜力[J]. 地球物理学进展,2007,22(6):1686-1691.
ZHANG Chijun, BIAN Shaofeng, ZHOU Xuhua, et al. Determination of Gravity Vertical Gradient and Its Application Potential [J]. *Progress in Geophysics*, 2007, 22(6): 1686-1691.

[6] HEILAND C A. A Rapid Method for Measuring the Profile Components of Horizontal and Vertical Gravity Gradients [J]. *Geophysics*, 1943, 8(2): 119-133.

[7] DIFRANCESCO D. Advances and Challenges in the Development and Deployment of Gravity Gradiometer Systems [C]//EGM 2007 International Workshop, Capri, Italy, 2007.

[8] 党亚民,章传银,晁定波,等. 综合利用海岸带GNSS水准和重力数据精密确定中国高程基准偏差[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2017,42(11):1644-1648.
DANG Yamin, ZHANG Chuanyin, CHAO Dingbo, et al. Precise Determination of National Height Datum Discrepancy from Combination of GNSS/Leveling and Gravity Data in Coastal Areas of China [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2017, 42(11): 1644-1648.

[9] 陈楚江,孙凤华,李德仁. 西藏墨脱地区工程精化似大地水准面的研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2004,29(7):638-641.
CHEN Chujiang, SUN Fenghua, LI Deren. Refining Engineering Quasi-Geoid of Mutuo, Xizang, China [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2004, 29(7): 638-641.

[10] 王谦身. 微重力测量:理论、方法与应用[M]. 北京:科学出版社,1995.
WANG Qianshen. Microgravity Measurement: Theory, Method and Application [M]. Beijing: Science Press, 1995.

[11] FERNÁNDEZ J, TIAMPO K F, RUNDLE J B, et al. On the Interpretation of Vertical Gravity Gradients Produced by Magmatic Intrusions [J]. *Journal of Geodynamics*, 2005, 39(5): 475-492.

[12] 宛家宽,罗志才,赵珞成. 利用FG5绝对重力仪观

测数据确定重力垂直梯度[J]. 地球物理学报, 2018, 61(1): 119-126.
WAN Jiakuan, LUO Zhicai, ZHAO Luocheng. Determining Vertical Gradients of Gravity by Observations of the FG5 Absolute Gravimeter[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2018, 61(1): 119-126.

[13] HIPKIN R G. Absolute Determination of the Vertical Gradient of Gravity[J]. *Metrologia*, 1999, 36(1): 47-52.

[14] PÁLINKÁŠ V, KŘEN P, VAĽKO M, et al. On the Determination of Vertical Gravity Gradients by Corner-Cube Absolute Gravimeters[J]. *Metrologia*, 2019, 56(5): 055006.

[15] 田桂娥, 陈晓东, 吴书清, 等. FG5绝对重力仪观测数据的实测重力潮汐改正[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2020, 45(6): 870-878.
TIAN Guie, CHEN Xiaodong, WU Shuqing, et al. Correction of Measured Gravity Tides with FG5 Absolute Gravimeter Observations[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2020, 45(6): 870-878.

[16] 张为民, 王勇, 詹金刚, 等. 中国地壳运动观测网络中的绝对重力测定[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2004, 29(3): 227-230.
ZHANG Weimin, WANG Yong, ZHAN Jingang, et al. Absolute Gravity Determination in the Crustal Movement Observation Network of China[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2004, 29(3): 227-230.

[17] 郭金运, 金鑫, 边少锋, 等. 垂线偏差测量的固体潮和海潮改正[J]. 测绘学报, 2022, 51(7): 1215-1224.
GUO Jinyun, JIN Xin, BIAN Shaofeng, et al. Corrections of Solid Earth Tide and Ocean Tide for Measurement of Deflection of the Vertical[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2022, 51(7): 1215-1224.

[18] 李红雨, 曹诚, 李凤婷, 等. 航空、航海重力和重力梯度在海洋、未知陆地战略勘探的发展[J]. 地球物理学进展, 2019, 34(1): 316-325.
LI Hongyu, CAO Cheng, LI Fengting, et al. Development of Airborne and Marine Gravity Exploration and Gravity Gradient Strategic Exploration for the Ocean and Unknown Land[J]. *Progress in Geophysics*, 2019, 34(1): 316-325.

[19] 孙中苗, 翟振和, 李迎春. 航空重力仪发展现状和趋势[J]. 地球物理学进展, 2013, 28(1): 1-8.
SUN Zhongmiao, ZHAI Zhenhe, LI Yingchun. Status and Development of Airborne Gravimeter[J]. *Progress in Geophysics*, 2013, 28(1): 1-8.

[20] 许厚泽, 孙和平. 国际GGP计划和武汉超导重力仪观测[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2003, 28(S1): 18-22.
XU Houze, SUN Heping. GGP Project and Observations Using Wuhan Superconducting Gravimeter[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2003, 28(S1): 18-22.

[21] BODDICE D, METJE N, TUCKWELL G. Quantifying the Effects of Near Surface Density Variation on Quantum Technology Gravity and Gravity Gradient Instruments[J]. *Journal of Applied Geophysics*, 2019, 164: 160-178.

[22] WANG Q B, ZHOU R, SUN W. Precision Analysis of Gravity Vertical Gradient Measurement Based on CG-5 Relative Gravimeter[J]. *Advanced Materials Research*, 2011, 301: 1036-1041.

[23] JIN X, LIU X, GUO J Y, et al. A Novel All-Weather Method to Determine Deflection of the Vertical by Combining 3D Laser Tracking Free-Fall and Multi-GNSS Baselines[J]. *Remote Sensing*, 2022, 14(17): 4156.

[24] 刘硕, 刘光博, 刘尚国, 等. 激光跟踪仪的测量误差解析与精度仿真[J]. 测绘工程, 2021, 30(6): 21-26.
LIU Shuo, LIU Guangbo, LIU Shangguo, et al. Measurement Error Analysis and Accuracy Simulation of Laser Tracker[J]. *Engineering of Surveying and Mapping*, 2021, 30(6): 21-26.

[25] HU C A, LUO S T, LI W Z, et al. Application of Laser Tracker in the Industrial Measurement Field[J]. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, 1820(1): 012119.

[26] SAWYER D, FRONCZEK C. Laser Tracker Compensation Using Displacement Interferometry[J]. *American Society for Precision Engineering*, 2003, 30: 351-358.

[27] CVITANIC T, MELKOTE S, BALAKIRSKY S. Improved State Estimation of a Robot End-Effector Using Laser Tracker and Inertial Sensor Fusion[J]. *CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*, 2022, 38: 51-61.

[28] 徐亚明, 郑琪, 管啸. Leica AT960激光跟踪仪测量精度分析[J]. 测绘地理信息, 2020, 45(1): 8-12.
XU Yaming, ZHENG Qi, GUAN Xiao. Precision Analysis of Leica AT960 Absolute Laser Tracker[J]. *Journal of Geomatics*, 2020, 45(1): 8-12.